TENTAMEN DISCRETE STRUCTUREN

12-4-2011

Alleen als je cijfer voor de deeltoets minimaal een 6 was geeft dit vrijstelling voor Deel 1 van dit tentamen (afleggen van Deel 1 is altijd toegestaan).

Voorzie de in te leveren bladen van je naam, en nummer ze. Schrijf op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen. Bij elk van de opgaven is het maximale aantal te behalen punten vermeld. ***Antwoorden dienen altijd van een motivatie te worden voorzien.*** *Succes!*

Deel 1

Opgave 1. (10 pt) Gegeven is een universele verzameling U.

a. Gebruik de verzamelingenalgebra om te bewijzen dat voor elk tweetal deelverzamelingen A en B van U geldt: $(A \cap B) \cap (A \cup B) = A \cap B$. Benoem de gebruikte regels.

b. Laat nu $P(U)$ de machtsverzameling van U zijn. Geef voor elk van de volgende beweringen aan of deze waar of onwaar is voor willekeurige U (motiveer je antwoorden):
(i) $\varnothing \in P(U)$ (ii) $\{\varnothing\} \in P(U)$ (iii) $\varnothing \subseteq P(U)$ (iv) $\{\varnothing\} \subseteq P(U)$.

Opgave 2. (10 pt) Gegeven de verzameling $\Sigma = \{0, 1, 2\}$. In elk van de volgende gevallen wordt een string uit Σ^* gevolgd door een reguliere expressie over Σ. Geef voor elk van die gevallen aan of de string behoort tot de reguliere verzameling die correspondeert met de betreffende reguliere expressie:

a. 012 $((0^*1) \vee 2)^*$
b. 012102 $((012) \vee 2)^*$
c. 020101 $(01)^*02$

Opgave 3. (10 pt) Bewijs met volledige inductie dat $n^3 - n$ deelbaar is door 3 voor alle gehele getallen $n \geqslant 2$.

Opgave 4. (15 pt) R is een relatie op de verzameling $A = \{1, 2, 3, 4\}$, gedefinieerd door de bijbehorende matrix:

$$\mathbf{M}_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Teken de graaf van R.
b. Geef de matrix behorende bij de relatie $R \circ R$ en ook die behorende bij de relatie $R^{-1} \circ R$.
c. Bekijk nu een willekeurige relatie S op A. Hoe zien we aan de matrix $\mathbf{M}_S$:
 i) of de bijbehorende graaf ongericht is?
 ii) of de relatie S een overal gedefinieerde functie op A is?

Opgave 5. (5 pt) Geef een voorbeeld van een partiële ordening op $A = \{a, b, c, d, e\}$ die twee maximale elementen heeft en geen kleinste ("least") element. Teken het bijbehorende Hasse diagram.

(Deel 2 op de volgende pagina)

Deel 2

Opgave 6. (10 pt)

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

a. Geef de Boolese expressie $f(x,y,z)$ die correspondeert met de waarheidstabel van de functie $f : B_3 \to B$ hiernaast.

b. Is de functie $f : B_3 \to B$ die correspondeert met deze waarheidstabel injectief ("one-to-one")? Surjectief ("onto")? Bijectief ("one-to-one correspondence")?

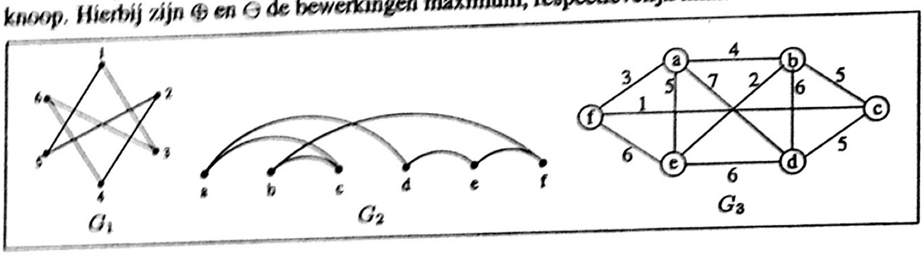
c. Gebruik de regels van de Boolese algebra om de expressie f te herschrijven zodat een minimaal aantal variabelen en operaties wordt gebruikt.

d. Teken het logische diagram van de nieuwe expressie.

Opgave 7. (10 pt) Gegeven is een gelabelde boom (T, v_0); de labels komen uit de verzameling $\{\oplus, \ominus, 0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Hierin zijn $\oplus$ en $\ominus$ binaire bewerkingen op de gehele getallen van 0 t/m 9.

a. De expressie $\oplus\ \ominus\ \oplus\ 3\ 4\ 1\ \ominus\ 2\ \oplus\ 3\ 0$ is het resultaat van een *preorder* wandeling ("preorder search") door de boom T. Teken de bijbehorende boom, inclusief labels.

b. Nummer de knopen van T volgens *postorder*. Wandel door de boom in postorder, en bereken de waarde in elke knoop. Hierbij zijn $\oplus$ en $\ominus$ de bewerkingen maximum, respectievelijk minimum.



Figuur 1: Drie ongerichte grafen.

Opgave 8. (10 pt)

a. De ongerichte grafen G_1 en G_2 in Figuur 1 zijn isomorf. Geef hiervan een bewijs.

b. Zijn de grafen G_1, G_2 en G_3 in in Figuur 1 regulier? Motiveer je antwoord.

c. R is de volgende equivalentierelatie op de knopen van de graaf G_1: $x\,R\,y$ d.e.s.d.a. $x = y$ of als er een pad van x naar y loopt waarvan de lengte een *even* getal is. Teken de quotientgraaf G_1^R.

d. Gegeven is een ongerichte graaf G met twee samenhangende componenten ("connected components") T_1 en T_2, d.w.z., T_1 en T_2 zijn niet met elkaar verbonden. T_1 en T_2 zijn beide ongerichte bomen. Voeg nu een kant $\{v, w\}$ toe aan de graaf G, met $v \in T_1$ en $w \in T_2$. Bewijs dat de zo ontstane graaf G' een boom is.

Opgave 9. (10 pt) Bekijk de gewogen ongerichte graaf G_3 in Figuur 1; de geheeltallige gewichten van de kanten zijn aangegeven.

a. Bepaal een minimale opspannende boom van de graaf G_3 volgens het algoritme van Kruskal, en teken deze boom. Geef ook aan in welke volgorde de kanten van de minimale opspannende boom door dit algoritme worden opgeleverd.

b. Bekijk de volgende twee beweringen **A** en **B** over een ongerichte graaf G:

A. *"de graaf G heeft een unieke minimale opspannende boom"*.

B. *"de gewichten van alle kanten van de graaf G zijn verschillend"*.

Geldt **A** $\Longrightarrow$ **B** en/of **B** $\Longrightarrow$ **A**? Motiveer je antwoord.

Opgave 10. (10 pt) Bekijk nogmaals de grafen G_1, G_2, G_3 uit Figuur 1.

a. Welke van deze grafen hebben een Euler circuit? En een Euler pad? Verklaar je antwoorden.

b. Een ongerichte boom heeft nooit een Euler circuit. Leg uit waarom.

c. Kan een ongerichte boom een Euler pad hebben? Zo ja, geef een voorbeeld, zo nee, leg uit waarom.

d. Geef een correcte ("proper") kleuring van de grafen G_1, G_2, G_3 met een minimaal aantal kleuren.